পদার্থবিজ্ঞান [শব্দ(Sound)]

ড. তিলক নারায়ণ ঘোষ

[বিভাগীয় প্রধান, ইলেকট্রনিক্স বিভাগ, মেদিনীপুর কলেজ(স্বশাসিত)]

Syllabus: Simple harmonic motion - forced vibrations and resonance - Fourier's Theorem - Application to saw tooth wave and square wave - Intensity and loudness of sound - Decibels - Intensity levels - musical notes - musical scale. Acoustics of buildings: Reverberation and time of reverberation - Absorption coefficient - Sabine's formula - measurement of reverberation time - Acoustic aspects of halls and auditoria. **(6 Lectures**

1.1. পর্যাবৃত্ত গতি (Periodic motion) ঃ

সংজ্ঞা ঃ যদি কোন বস্তু কোন নির্দিষ্ট সময়ে একই পথ বারবার অতিক্রম করে, তবে ঐ বস্তুর গতিকে পর্যাবৃত্ত গতি বলে।

পৃথিবী সূর্যের চতুর্দিকে একবার ঘুরে আসতে এক বৎসর সময় নেয় এবং এইরূপ প্রদক্ষিণ পৃথিবী নিয়তই করে যাচ্ছে। সুতরাং সূর্যের চতুর্দিকে পৃথিবীর গতিকে আমরা পর্যাবৃত্ত গতি বলব। তেমনি ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা বা মিনিটের কাঁটাও পর্যাবৃত্ত গতিতে ঘোরে।

আবার যদি একটি ছোট ধাতব বলকে একগাছা সুতো দিয়ে ঝুলিয়ে একটি দোলক (pendulum) তৈরি করা যায় এবং দোলকের পিণ্ডটিকে (bob) অর্থাৎ ধাতব বলকে একদিকে খানিকটা টেনে ছেড়ে দেওয়া যায়, তবে পিণ্ডটি একবার বামে ও একবার দক্ষিণে যাবে এবং বারবার একই পথ অতিক্রম করবে। দেখা যাবে যে, ঐ পথ অতিক্রম করতে তার একটি নির্দিষ্ট সময় লাগছে। কাজেই দোলকের এই গতিকেও পর্যাবৃত্ত গতি বলা যাবে, কিন্তু যেহেতু, এই গতি সরলরেখা অবলম্বন করে সম্পন্ন হয়, সেইহেতু একে **রৈখিক পর্যাবৃত্ত** (linear periodic) গতি বলা হয়। ঘড়ির কাঁটা বা পৃথিবীর গতি চক্রাকারে হয় বলে এদের **চক্রায়িত পর্যাবৃত্ত** (rotational periodic) গতি বলা হয়।

1.2. সরল দোলগতি (Simple harmonic motion) ঃ

সংজ্ঞা ঃ কোন বস্তুর উপর যদি বল এমনভাবে ক্রিয়া করে যাতে ঐ বল সর্বদা বস্তুর গতিপথের মধ্য অবস্থান (mean position) অথবা কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর প্রতি অভিমুখী হয় এবং ঐ অবস্থান অথবা ঐ বিন্দু হতে বস্তুর সরণের (displacement) সমানুপাতি হয়, তবে ঐ বলের অধীনে ঐ বস্তুর গতিকে সরল দোলগতি বলা হয়।

প্রযুক্ত বলের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে সরল দোলগতি (i) **রৈখিক** অথবা (ii) **কৌণিক**—দুই প্রকার হতে পারে। নিয়ত ক্রিয়াশীল সবাধ বলের (constraining force) অধীনে বস্তু সরলরেখায় গতিযুক্ত হলে সরল রৈখিক দোলগতি এবং নিয়ত ক্রিয়াশীল সবাধ দ্বন্দ্বের (couple) বা টর্ক (torque)-এর অধীনে কোন অক্ষের চতুর্দিকে চক্রায়িত গতিযুক্ত হলে সরল কৌণিক দোলগতি সম্পন্ন হবে। আমরা বর্তমানে সরল রৈখিক দোলগতির কথা আলোচনা করব।

● **সরল দোলগতির বৈশিষ্ট্য ঃ**

(i) এই গতি দোলায়িত (oscillatory) এবং পর্যাবৃত্ত (periodic)—অর্থাৎ বস্তু দক্ষিণে ও বামে চলাচল করবে এবং একই পথ নির্দিষ্ট সময়ে বারবার অতিক্রম করবে।

(ii) যে-কণা সরল দোলগতিতে দুলবে, যে-কোন মুহূর্তে তার ত্বরণ সেই সময়কার সরণের সমানুপাতি হবে। এই সরণ কণাটির গতিপথের মধ্য-অবস্থান থেকে সর্বদা মাপতে হবে।

(iii) যে-কোন মুহূর্তে কণাটির ত্বরণ কণাটির গতিপথের মধ্য-অবস্থানের অভিমুখী হবে।

ক্ষুদ্র বিস্তারে সরল দোলকের গতি, সুরশলাকার (tuning fork) বাহুর গতি প্রভৃতি সরল দোলগতির উদাহরণ।

[দ্রঃ একথা মনে রাখতে হবে যে সরল দোলগতি মাত্রই পর্যাবৃত্ত গতি—কিন্তু সকল পর্যাবৃত্ত গতিই সরল দোলগতি নয়।]

1.3. সরল দোলগতিসম্পন্ন বস্তুকণার সরণ, বেগ ইত্যাদি (Displacement, Velocity etc. of a particle executing simple harmonic motion) ঃ

a বিস্তারের দোলগতি নির্বাহ করছে এরূপ বস্তুকণার t সময়ে সরণ x হলে,

(i) সরণ $x = a \sin \omega t.$

(ii) বেগ $\upsilon = \frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{a^2 - x^2}$ এবং $\upsilon_{max} = \omega . a.$

(iii) ত্বরণ $f = \frac{d\upsilon}{dt} = -\omega^2 x$ এবং $f_{max} = -\omega^2 a.$

(iv) বল $P = mf = -m\omega^2 x$ এবং $P_{max} = -m\omega^2 a.$

(v) গতিশক্তি $E_k = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 (a^2 - x^2).$

(vi) স্থিতিশক্তি $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$

(vii) দোলনের কম্পাঙ্ক $n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f}{x}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{d^2x/dt^2}{x}}$

(viii) দোলনের পর্যায়কাল $T = \frac{1}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{f}} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{d^2x/dt^2}}.$

[উপরোক্ত সম্পর্কগুলি উচ্চমাধ্যমিক স্তরের পাঠ্যবিষয় হওয়ায়, এখানে তাদের প্রমাণ আলোচনা করা হল না।]

কম্পন কয় প্রকার ? সংক্ষেপে ব্যাখ্যা করো।

কম্পন প্রধানত দু'প্রকার : (i) তির্যক বা অনুপ্রস্থ এবং (ii) অনুদৈর্ঘ্য।
কোনো বস্তুর বিভিন্ন কণা যদি স্বীয় দৈর্ঘ্যের সমকোণে কম্পিত হয় তবে ঐ কম্পনকে তির্যক কম্পন বলে। দুই প্রান্তে আবদ্ধ একটি তারের মধ্য বিন্দুকে তারের দৈর্ঘ্যের সমকোণে টেনে ছেড়ে দিলে, তারটি তির্যক কম্পনে কম্পিত হবে।
কোনো বস্তুর বিভিন্ন কণা যদি স্বীয় দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে কম্পিত হয়, তবে ঐ কম্পনকে অনুদৈর্ঘ্য কম্পন বলে। একটি স্প্রিংয়ের একপ্রান্তে একটি ভার ঝুলিয়ে যদি ভার-কে একটু নীচের দিকে টেনে ছেড়ে দেওয়া হয়, তবে স্প্রিং পর্যায়ক্রমে দৈর্ঘ্যে বাড়বে এবং কমবে। এক্ষেত্রে স্প্রিংয়ের কম্পন স্বীয় দৈর্ঘ্যের অভিমুখে হচ্ছে বলে এই কম্পন অনুদৈর্ঘ্য কম্পন।

পরবশ কম্পন কাকে বলে ? উদাহরণ সহযোগে ব্যাখ্যা করো। [C.U. 2005]

কিছু সময় ধরে কোনো পর্যাবৃত্ত বল (periodic force) প্রয়োগ করে কোনো বস্তুকে কম্পিত করালে, ওই কম্পনকে পরবশ কম্পন বলে।
একটি সুরশলাকার হাতল ধরে শলাকাকে রবারের প্যাড দ্বারা আঘাত করলে এর বাহুদুটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কে কম্পিত হতে থাকে এবং একটি শব্দ শোনা যায় ; কিন্তু এই শব্দ সাধারণত জোরালো হয় না। কিন্তু কম্পনরত অবস্থায় সুরশলাকার হাতল টেবিলের উপর চেপে ধরলে টেবিল পরবশ কম্পনে কম্পিত হয় বলে বেশি আয়তনের বায়ুকে কম্পিত করে এবং জোরালো শব্দের সৃষ্টি করে।

Forced vibrations and resonance

পরবশ কম্পন (Forced vibration) :

সরল দোলগতি নির্বাহ করছে এরূপ একটি দোলকের পর্যায়কাল দোলকের মাত্রা, স্থিতিস্থাপক ধর্ম প্রভৃতির উপর নির্ভর করে। ঐ ধরনের দোলকের দোলন ধীরে ধীরে কমে আসে কারণ মন্দনের জন্য তার শক্তির ক্রমাবনতি হয়। কিন্তু বাইরে থেকে শক্তি সরবরাহ করে তার দোলন অব্যাহত রাখা যায়।

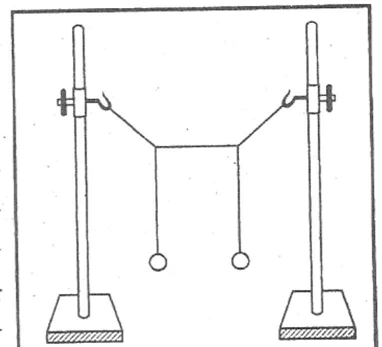
পরবশ কম্পন : সংজ্ঞা : কিছু সময় ধরে কোন পর্যায়বৃত্ত বল (periodic force) প্রয়োগ করে কোন বস্তুকে কম্পিত করার চেষ্টা করা হলে উক্ত কম্পনকে পরবশ বা প্রণোদিত কম্পন (forced vibration) বলা হয়।

দোলকের উপর বাইরে থেকে পর্যাবৃত্ত বল প্রয়োগ করলে প্রথমত মন্দন বল এবং প্রযুক্ত বলের ভিতর এক ধরনের লড়াই (tussle) শুরু হয়। মন্দন বল দোলকের গতিকে স্তব্ধ করতে চায় আবার প্রযুক্ত বল ঐ গতিতে বজায় রাখতে চায়। ফলে, প্রথম অবস্থায় দোলকের দোলন এলোমেলো হতে দেখা যায়, কিন্তু পরিশেষে দোলক বাইরের বলের কাছে আত্মসমর্পণ করে এবং প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক অনুযায়ী স্থির বিস্তারে কম্পিত হতে থাকে। বস্তুর স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক যাই হোক না কেন, যতক্ষণ পর্যাবৃত্ত বল ক্রিয়া করবে ততক্ষণ বস্তু ঐ বলের কম্পাঙ্ককে অনুসরণ করে ঐ কম্পাঙ্কে কম্পিত হতে থাকবে।

উদাহরণ : পরবশ কম্পাঙ্কের উদাহরণ খুব সহজেই পাওয়া যায়। একটি সুরশলাকাকে কম্পিত করে কানের খুব কাছে ধরলে বেশ জোর শব্দ শোনা যায়। কিন্তু সুরশলাকাকে দূরে সরিয়ে নিলে শব্দের প্রাবল্য (loudness) ধীরে ধীরে কমে আসে। সুরশলাকার বাহুর ক্ষেত্রফল খুব কম হওয়ায় তাকে আমরা শক্তির প্রায় বিন্দু উৎস (point source) বলে মনে করতে পারি। ঐরূপ উৎস নিঃসৃত শব্দের প্রাবল্য দূরত্বের বর্গের সঙ্গে ব্যস্তানুপাতি হওয়ায় সুরশলাকাকে দূরে সরিয়ে নিলে শব্দর প্রাবল্য আস্তে আস্তে হ্রাস পায়।

কিন্তু কম্পিত সুরশলাকাকে যদি টেবিলের উপর চেপে ধরা হয় তবে ঘরের যে-কোনো জায়গা থেকেই শব্দ বেশ জোরে শোনা যাবে। এই অবস্থায় টেবিল পরবশ কম্পনে কম্পিত হয় এবং বৃহৎ শক্তি উৎস হিসাবে কাজ করে। বৃহৎ উৎস বহু বিন্দু উৎসের সমষ্টি বলে, ঘরের যে-কোনো জায়গায় প্রত্যেকটি বিন্দু উৎসই শব্দের প্রাবল্য সৃষ্টি করবে এবং সব মিলিয়ে জোর শব্দ শোনা যাবে।

সরল দোলকের দোলন থেকে আমরা পরবশ কম্পনের যান্ত্রিক উদাহরণ পাই। একগাছা রবারের সুতো বা ঐরূপ নমনীয় কোন সুতো থেকে দুটি একই দৈর্ঘ্যের দোলক পাশাপাশি ঝোলাও [চিত্র 2.6]। এইবার একটি দোলক-কে আন্দোলিত করে ছেড়ে দাও। দেখবে কিছুক্ষণের মধ্যে অপর দোলকটি দুলতে শুরু করেছে। এক্ষেত্রে সুতোর মাধ্যমে প্রথম দোলকের দোলন দ্বিতীয় দোলকে সঞ্চারিত হয় এবং দ্বিতীয় দোলক পরবশ কম্পনে কম্পিত হয়। প্রথম দোলকের শক্তি এইভাবে দ্বিতীয় দোলকে সঞ্চারিত হবার ফলে দেখা যাবে যে কিছুক্ষণ আন্দোলনের পর প্রথম দোলক স্থির হয়েছে কিন্তু দ্বিতীয় দোলক আন্দোলিত হচ্ছে। আরও কিছুক্ষণ পরে দেখা যাবে যে দ্বিতীয়টি স্থির অবস্থায় এসেছে—শুধু প্রথমটি আন্দোলিত হচ্ছে। প্রকৃতপক্ষে, এইরূপ পর্যায়ক্রমে বেশ কয়েকবার পরবশ কম্পনের ফলে একটি দোলক থেকে অন্যটিতে শক্তির স্থানান্তর হবে।


চিত্র 2.6

পরবশ কম্পনের গাণিতিক বিশ্লেষণ (Mathematical analysis of forced vibration) :

মনে কর, একক স্বাতন্ত্র সংখ্যাবিশিষ্ট m ভরের একটি বস্তুকণা মন্দনসৃষ্টিকারী একটি মাধ্যমে আন্দোলিত হচ্ছে। কণার গতিতে মাধ্যম কিছু বাধার সৃষ্টি করবে। কণার বেগ কম থাকলে, আমরা পূর্বে দেখেছি, বাধার বল কণার গতিবেগের সমানুপাতি হয়। কণার উপর বাইরে থেকে $p/2\pi$ কম্পাঙ্কযুক্ত এবং F_0 বিস্তারের এক পর্যাবৃত্ত বল $F_0 \sin pt$ প্রয়োগ করা হল। প্রত্যানয়নকারী বল সরণের সমানুপাতি হওয়ায়, কণার গতির সমীকরণ হবে :

$$\frac{md^2x}{dt^2} = -\mu x - r.\frac{dx}{dt} + F_0 \sin pt$$

অথবা, $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}.\frac{dx}{dt} + \frac{\mu}{m}\cdot x = \frac{F_0}{m}\cdot \sin pt$$

অথবা, $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k.\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin pt \quad .... \text{(i)}$$

যেখানে, $\frac{r}{m} = 2k$; $\frac{\mu}{m} = \omega_0^2$ এবং $F_0/m = f_0$; বলা বাহুল্য ω_0 কণার স্বাভাবিক কৌণিক কম্পাঙ্ক এবং k মন্দন ধ্রুবক।

● **সমীকরণের সমাধান :**

উপরোক্ত (i) সমীকরণ দ্বিতীয় ক্রমের (second order) রৈখিক অবকল সমীকরণ। এর সমাধান দুই স্তরে করতে হবে। প্রথম, $\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ ধরে সমাধান এবং দ্বিতীয়, পরখ সমাধান (solution by trial)।

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ এটা পূর্বে উল্লিখিত মন্দিত সমঞ্জস দোলনের সমীকরণ। পূর্ব অনুচ্ছেদে আমরা এর সমাধান নির্ণয় করেছি এবং সেই সমাধান হল :

$$x = R.e^{-kt} \sin (\sqrt{\omega_0^2 - k})t + \alpha \text{ [সমীকরণ (vi)]}$$

মন্দন বল এবং প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বলের ভিতর প্রাথমিক লড়াই শেষ হবার পর যখন **স্থিতাবস্থার উদ্ভব** হয় এবং দোলক পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক $p/2\pi$ কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হতে থাকে তখন (i) নং সমীকরণের পরখ সমাধানরূপে $x = A \sin (pt - \delta)$ ব্যবহার করা যেতে পারে। δ হল প্রযুক্ত বল এবং দোলকের সরণের ভিতর সম্ভাব্য দশা-পার্থক্য।

এখন, $\frac{dx}{dt} = A.p.\cos(pt-\delta)$ এবং $\frac{d^2x}{dt^2} = -A.p^2\sin(pt-\delta)$

(i) নং সমীকরণে এই মানগুলি বসালে পাই,

$-A.p^2\sin(pt-\delta) + 2k.A.p.\cos(pt-\delta) + {\omega_0}^2 A\sin(pt-\delta) = f_0\sin pt$

অথবা, $A({\omega_0}^2 - p^2)\sin(pt-\delta) + 2kA.p\cos(pt-\delta) = f_0\sin\{(pt-\delta)+\delta\}$

$= f_0\sin(pt-\delta)\cos\delta + f_0\sin(pt-\delta)\sin\delta$ .... (ii)

t-এর সকল মানের জন্য এই সমাধান প্রযোজ্য হলে, সমীকরণের দুই পাশের $\sin(pt-\delta)$-এর সহগ (co-efficient) পরস্পরের সমান হবে এবং $\cos(pt-\delta)$-এর সহগও পরস্পরের সমান হবে। অর্থাৎ,

$A({\omega_0}^2 - p^2) = f_0\cos\delta$ .... (iii)

এবং $2k.A.p = f_0\sin\delta$ .... (iv)

(iii) এবং (iv) নং সমীকরণদ্বয়ের বর্গ নিয়ে যোগ করলে পাই, $A^2({\omega_0}^2 - p^2)^2 + 4k^2A^2p^2 = {f_0}^2$

অথবা, বিস্তার $A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2) + 4k^2p^2}}$ .... (v)

(iii) এবং (iv) নং সমীকরণ ভাগ দিলে পাই,

$\tan\delta = \frac{2kp}{(\omega_0^2 - p^2)}$ অথবা, $\delta = \tan^{-1}\frac{2kp}{(\omega_0^2 - p^2)}$ ...... (vi)

$\therefore\ x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4k^2p^2}}.\sin\left[p.t - \tan^{-1}\frac{2kp}{(\omega_0^2 - p^2)}\right]$....... (vii)

অতএব, (i) নং সমীকরণের সম্পূর্ণ সমাধান হবে,

$x = R.e^{-kt}.\sin(\sqrt{\omega_0^2 - k^2}.t+\alpha) + A\sin(pt-\delta)$ যেখানে, A এবং δ-এর মান (v) এবং (vi) নং সমীকরণ থেকে পাওয়া যাবে।

উপরোক্ত সম্পূর্ণ সমাধানের প্রথম অংশ $[Re^{-kt}\sin(\sqrt{\omega_0^2 - k^2}.t+\alpha)]$ দোলকের $\sqrt{(\omega_0^2 - k^2)}/2\pi$ কম্পাঙ্কের স্বাভাবিক মন্দিত দোলন প্রকাশ করে এবং দ্বিতীয় অংশ প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্কের $(\pi/2\pi)$ সমকম্পাঙ্ক যুক্ত পরবশ কম্পন প্রকাশ করে। প্রথম অংশে e^{-kt} এর ন্যায় এক্সপোনেনসিয়াল রাশি থাকায় বোঝা যায় যে, দোলকের স্বাভাবিক কম্পন সময়ের সঙ্গে হ্রাস পায় এবং কালক্রমে শূন্য হয়। তারপর দোলকের দোলনে স্থিতাবস্থা আসে এবং দোলক পর্যাবৃত্ত বলের অধীনে ঐ বলের কম্পাঙ্ক সহ স্থির-বিস্তার A নিয়ে কম্পিত হতে থাকে। সুতরাং **একক স্বাতন্ত্র্য সংখ্যাবিশিষ্ট কোন বস্তু পর্যাবৃত্ত বলের অধীনে কম্পিত হলে তার গতির একটি অস্থায়ী এবং একটি স্থায়ী অবস্থা থাকে।**

পরবশ কম্পনের বিস্তার কখন অসীম হয় ? এটা কি বাস্তবে সম্ভব ?

যখন অনুনাদক বা দোলককে কোনো মন্দন (damping)-এর সম্মুখীন হতে না হয়, তখন পরবশ কম্পনের বিস্তার হয় অসীম। বাস্তবে এটা সম্ভব নয় কারণ বাস্তব ক্ষেত্রে বায়ুমধ্যে দোলক দুলতে থাকলে, বায়ুর সঙ্গে ঘর্ষণ, বায়ুর সান্দ্রতা ইত্যাদি কিছু না কিছু মন্দন থাকবেই। সুতরাং পরবশ কম্পনের বিস্তার অসীম হতে পারবে না।

"কোনো বস্তু পর্যাবৃত্ত বলের অধীনে কম্পিত হলে তার গতির একটি অস্থায়ী এবং একটি স্থায়ী অবস্থা থাকে।" এই উক্তির ব্যাখ্যা করো।

কোনো বস্তুর পরবশ কম্পনের গাণিতিক বিশ্লেষণ করলে দেখা যায় এর গতির দুটি অংশ আছে ; প্রথম অংশ দোলকের স্বাভাবিক মন্দিত দোলন প্রকাশ করে এবং দ্বিতীয় অংশ প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্কের সমকম্পাঙ্কযুক্ত পরবশ কম্পন প্রকাশ করে। প্রথম অংশে আবার একটি e^{-kt} এর মত এক্সপোনেনশিয়াল রাশি থাকায় দোলকের স্বাভাবিক কম্পন সময়ের সঙ্গে দ্রুত হ্রাস পায় এবং কালক্রমে শূন্য হয়। এই অবস্থাকে বলে অস্থায়ী অবস্থা। তারপর দোলকের দোলনে স্থিতাবস্থা আসে এবং দোলক পর্যাবৃত্ত বলের অধীনে ঐ বলের কম্পাঙ্কসহ স্থিরবিস্তার নিয়ে কম্পিত হতে থাকে। একে স্থিরাবস্থা বলে।

[C.U. 2005]

অনুনাদ কাকে বলে ?

পরবশ কম্পনের বিস্তার সাধারণত কম হয়। পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক ও বস্তুর নিজস্ব স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক (normal frequency) কিভাবে সম্পর্কযুক্ত, তার উপর পরবশ কম্পনের বিস্তার নির্ভর করে। পরবশ কম্পনের কম্পাঙ্ক ও বস্তুর নিজস্ব স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক মিলে গেলে খুব অল্প বল প্রয়োগে এবং অল্প সময়ে বস্তু প্রবল বেগে কম্পিত হবে। এই ধরনের কম্পনকে অনুনাদ বলে।

সংজ্ঞা : যখন কোনো অনুনাদক (resonator) নিজস্ব স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সমকম্পাঙ্কযুক্ত কোনো বস্তুর কম্পনের দ্বারা নিজস্ব কম্পাঙ্কে কম্পিত হয়, তখন ঐ ঘটনাকে অনুনাদ বলে।

অনুনাদ (Resonance) ঃ

পরবশ কম্পনের বিস্তার সাধারণত কম হয়। পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক ও বস্তুর নিজস্ব স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক কিভাবে সম্পর্কযুক্ত তার উপরই পরবশ কম্পনের বিস্তার নির্ভর করে। পরবশ কম্পনের কম্পাঙ্ক ও বস্তুর নিজস্ব স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক মিলে গেলে খুব অল্প বলপ্রয়োগে এবং অল্প সময়ে বস্তু প্রবলবেগে কম্পিত হবে। এই ধরনের কম্পনকে **অনুনাদ** (resonance) অথবা **সমবেদী কম্পন** (sympathetic vibration) বলে।

সংজ্ঞা ঃ যখন কোন অনুনাদক (resonator) নিজস্ব স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সমকম্পাঙ্কযুক্ত বস্তুর কম্পনের দ্বারা নিজস্ব কম্পাঙ্কে কম্পিত হয়, সেই ঘটনাকে অনুনাদ বলা হয়।

পূর্বের অনুচ্ছেদে আমরা দেখেছি যে, স্থিতাবস্থায় পরবশ কম্পনের বিস্তার

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4k^2p^2}} \quad \text{........ (i)}$$

এথেকে বোঝা যায় যে বিস্তার অনুনাদকের নিজস্ব কৌণিক কম্পাঙ্ক ω_0 এবং প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্ক p-এর পারস্পরিক সম্পর্কের উপর নির্ভরশীল। বস্তুত **বিস্তার A সর্বাধিক হবে যখন $\omega_0 = p$-হবে এবং সর্বাধিক বিস্তারের মান হবে $A_{max} = \frac{f_0}{2kp}$**. এটাই অনুনাদী শর্ত।

যদি কোনক্রমে $k = 0$ হয় অর্থাৎ অনুনাদক বা দোলক-কে কোন মন্দনের সম্মুখীন হতে না হয়, তবে বিস্তার হবে অসীম ($A = \infty$)। বাস্তবে এটা সম্ভব নয় কারণ বাস্তব ক্ষেত্রে বায়ুতে দোলক দুলতে থাকলে, বায়ুর সঙ্গে ঘর্ষণ, বায়ুর সান্দ্রতা ইত্যাদি—কিছু না কিছু মন্দন থাকবেই। সুতরাং বাস্তবে k-এর মান সসীম (finite) এবং শূন্য অপেক্ষা অধিক। এই অবস্থায় (i) নং সমীকরণ থেকে জানা যায় যে, A-এর মান সর্বাধিক হবে যখন ঐ সমীকরণের হর (denominator) সর্বনিম্ন হবে অথবা $\frac{d}{dp}[(\omega_0{}^2 - p^2)^2 + 4k^2p^2] = 0$ হবে।

অথবা যখন, $-4(\omega_0{}^2 - p^2)p + 8k^2.p = 0$ হবে

অথবা যখন, $p = \sqrt{\omega_0^2 - 2k^2}$ হবে।

দেখা যাচ্ছে যে, A-র মান সর্বাধিক হবে যখন প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক $\sqrt{(\omega_0^2 - 2k^2)}\,/2\pi$ হয়— যেটা দোলকের মন্দনহীন স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের ($\omega_0/2\pi$) সমান নয় অথবা দোলকের মন্দিত স্বাভাবিক কম্পাঙ্কেরও $\sqrt{(\omega_0^2 - k^2)}\,/2\pi$ সমান নয়—উভয় অপেক্ষা কিছু নিম্নমানের।

(i) নং সমীকরণে k-এর সাপেক্ষে p অথবা ω_0-এর মান বসালে, বিস্তারের সর্বাধিক মান পাই,

$$A_{max} = \frac{f_0}{2k\sqrt{\omega_0^2 - k^2}} \quad \text{অথবা} \quad A_{max} = \frac{f_0}{2k\sqrt{p^2 + k^2}}$$

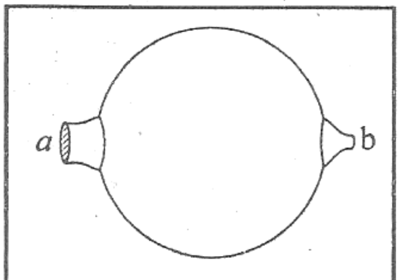
বলা বাহুল্য k-এর মান যত কম হবে A_{max}-এর মান তত বেশি হবে। তাছাড়া (i) নং সমীকরণ থেকে বলা যায় যে, বিস্তারকে নিয়ন্ত্রণ করে $(\omega_0{}^2 - p^2)$ রাশি। অতএব, $\omega > p$ অথবা $\omega < p$-উভয় ক্ষেত্রেই A-র মান কমবে।

অনুনাদের দৃষ্টান্ত (Illustration of resonance) ঃ

(1) বাদ্যযন্ত্রের ফাঁপা বাক্স (Hollow box in musical instruments) ঃ বেহালা, সেতার প্রভৃতি বাদ্যযন্ত্রগুলি লক্ষ্য করলে দেখবে যে, যন্ত্রের তারগুলি একটি ফাঁপা বাক্সের উপর আটকানো আছে। ফাঁপা বাক্সগুলি বায়ুপূর্ণ থাকে। যখন তারকে কম্পিত করে শব্দ উৎপন্ন করা হয় তখন বাক্সের অভ্যন্তরস্থ বায়ুতে ঐ কম্পন সংবাহিত হয় এবং বায়ু পরবশ কম্পনে কম্পিত হয়।

সুরশলাকাগুলি ঐরূপ ফাঁপা বাক্সের উপর বসানো থাকে। ঐ বাক্সের সাইজ এরূপ করা হয় যে তার অভ্যন্তরস্থ বায়ুর স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক সুরশলাকার কম্পাঙ্কের সমান হয়। ফলে সুরশলাকার কম্পন হলে বাক্সের ভিতরস্থ বায়ুর কম্পন হয় এবং অনুনাদের সৃষ্টি হয়। এতে শব্দ খুব জোরালো হয়।

(2) হেল্‌ম্‌হোৎসের অনুনাদক (Helmholtz's resonator) : বহু কম্পাঙ্কযুক্ত স্বরকে বিশ্লেষণ করার জন্য পরবশ কম্পন ও অনুনাদের সাহায্য নিয়ে জার্মান বিজ্ঞানী হেল্‌ম্‌হোৎস এই অনুনাদক উদ্ভাবন করেন। 2.7 নং চিত্রে ঐরূপ একটি অনুনাদক দেখানো হয়েছে।



চিত্র 2.7

এটা পিতলের তৈরি ; দেখতে অনেকটা গোলকের ন্যায়। a এবং b হল এর দুটি মুখ a মুখ কিছু বড়। একে বলা হয় অনুনাদকের গ্রীবা (neck) । একে শব্দের উৎসের দিকে ধরা হয়। b মুখ অপেক্ষাকৃত ক্ষুদ্র। ঐ মুখে কান রেখে শব্দ শুনতে হয়। অনুনাদকের সাইজ অনুযায়ী তার অভ্যন্তরস্থ বায়ুর একটি স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক আছে। যখন a মুখে শব্দ এসে উপস্থিত হয় এবং ঐ শব্দে যদি বহু কম্পাঙ্ক থাকে তবে অনুনাদকের বায়ুতে পরবশ কম্পন সৃষ্টি হবে। আপতিত শব্দের ভিতর অনুনাদকের বায়ুর স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সুর থাকলে বায়ুতে অনুনাদ সৃষ্টি হবে। b মুখে কান রাখলে ঐ সুরের শব্দ স্পষ্ট ও নির্ভুলভাবে শোনা যাবে ; অন্যান্য সুর শোনা যাবে না। ঐরূপ বিভিন্ন কম্পাঙ্কের কয়েকটি অনুনাদক নিয়ে কোন মিশ্র স্বরের কম্পাঙ্ক বিশ্লেষণ করা খুব সহজ। অনুনাদকের গ্রীবার দৈর্ঘ্য l, প্রস্থচ্ছেদ α, গোলকের আয়তন V এবং শব্দের গতিবেগ υ হলে প্রমাণ করা যায় যে অনুনাদকের স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক

$$n = \frac{\upsilon}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{l.V}} \text{ ।}$$

প্রমাণ ঃ যখন বহিরাগত কোন শব্দতরঙ্গ অনুনাদকের গ্রীবা a-র উপর এসে পড়ে তখন গোলকের সমস্ত বায়ুই আন্দোলিত হয়, এ সম্বন্ধে কোন সন্দেহ নাই। কিন্তু গোলকের বায়ুর আন্দোলনের তুলনায় গ্রীবার বায়ুর আন্দোলন অনেক দ্রুত হয় এবং গ্রীবার বায়ুকণাগুলি একযোগে পিস্টনের ন্যায় সামনে-পিছনে চলাচল করে। ফলে গোলকের অংশের বায়ুতে রুদ্ধতাপ সংনমন এবং তনুভবনের উদ্ভব হয়।

এখন, গ্রীবার অংশের বায়ুর ভর $= \alpha l\rho$ [$\rho =$ বায়ুর ঘনত্ব]

ধর, গ্রীবার বায়ুর সামান্য চাপ পরিবর্তনে ঐ বায়ু-পিস্টনের t সময়ে সামান্য x সরণ হল। গ্রীবার অভ্যন্তরস্থ এবং বহিঃস্থ চাপ যথাক্রমে p_1 এবং p_2 হলে, চাপের পরিবর্তন $= p_1 - p_2$; অতএব গ্রীবার বায়ুর উপর ক্রিয়ারত বল $= (p_1 - p_2) \times$ প্রস্থচ্ছেদ $= (p_1 - p_2).\alpha$

এখন, উক্ত বায়ু-পিস্টনের ত্বরণ $= \frac{d^2x}{dt^2}$, অতএব নিউটনের সূত্রানুযায়ী,

$$\alpha.l.\rho.\frac{d^2x}{dt^2} = (p_1 - p_2).\alpha........ \text{(i)}$$

এখন, রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের বেলায়,

$p_1(V-x.a)^\gamma = p_2V^\gamma$ [γ = বায়ুর দুই আঃ তাপের অনুপাত]

অথবা, $p_1\left(1+\frac{x.\alpha}{V}\right)^\gamma = p_2$

অথবা, $p_1\left(1+\frac{\gamma.x.\alpha}{V}\right) = p_2$

অথবা, $p_1 - p_2 = -\frac{\gamma.x.\alpha.p_1}{V}$

(i) নং সমীকরণে এই মান বসালে পাই,

$$l\rho\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma.\alpha.p_1.x}{V}$$

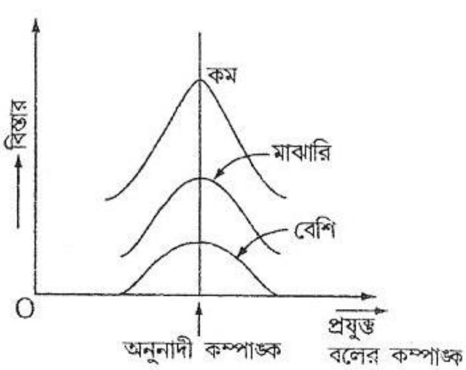
অথবা, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma.\alpha.p_1.x}{V.l.\rho} = -\omega^2.x\left[\omega = \sqrt{\frac{\gamma.\alpha.p_1}{Vl\rho}}\right]$

উপরোক্ত সমীকরণ সরল দোলগতির ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ। সুতরাং অনুনাদকের বায়ুর কম্পন সরল দোলগতিযুক্ত। এর কম্পাঙ্ক n হলে, $n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma.\alpha.p_1}{V.l.\rho}} = \frac{\upsilon}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{lV}}$ $\left[\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma.p_1}{\rho}}\right]$

(3) অনুনাদী বায়ুস্তম্ভ (Resonant air column) : কোন নলের বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য অনুযায়ী তার নিজস্ব একটি কম্পাঙ্ক থাকে। উক্ত নলের মুখে একটি কম্পমান সুরশলাকা রাখলে সুরশলাকার কম্পন বায়ুস্তম্ভে পরবশ কম্পন সৃষ্টি করবে। এই পরবশ কম্পনের কম্পাঙ্ক যদি বায়ুস্তম্ভের নিজস্ব কম্পাঙ্কের সঙ্গে মিলে যায় তবে বায়ুস্তম্ভে অনুনাদ সৃষ্টি হবে এবং বায়ুস্তম্ভ প্রবলবেগে কম্পিত হবে। এই ধরনের ব্যবস্থাকে **অনুনাদী বায়ুস্তম্ভ** বলে।

অনুনাদের তীক্ষ্ণতা বলতে কি বোঝ ? **[C.U. 2000, '07]**

বস্তুর উপর প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক এবং বস্তুর স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সম্পর্কের উপর পরবশ কম্পনের বিস্তার নির্ভর করে। পরবশ কম্পনের বিস্তার মন্দনের উপরও নির্ভর করে। 2.1 নং চিত্রে বেশি, মাঝারি এবং কম মন্দনের বেলায় একটি কম্পনশীল বস্তুর কম্পনের বিস্তার প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্কের সাথে কিভাবে পরিবর্তিত হয় তা দেখানো হয়েছে।



চিত্র 2.1

চিত্র থেকে দেখা যায় যে মন্দন যত কম হয় অনুনাদ তত তীক্ষ্ণ হয়। মন্দন বৃদ্ধি পেলে লেখচিত্রের অনুনাদী অংশ ক্রমশ সমতল (flat) হয়ে পড়ে। অর্থাৎ অনুনাদের তীক্ষ্ণতা বা খরতা (sharpness) কমে যায়। এই ঘটনাকে অনুনাদের তীক্ষ্ণতা বলে। প্রমাণ করা যায়, মন্দন সম্পূর্ণভাবে অনুপস্থিত থাকলে, অনুনাদী কম্পনের বিস্তার অসীম হবে।

পৃথিবীর অভ্যন্তরে সর্বদাই কিছু পর্যাবৃত্ত কম্পন ঘটে থাকে। ঐ কম্পনের কম্পাঙ্ক যদি কখনও কোনো হ্রদের জলের তরঙ্গের স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সাথে মিলে যায় তবে বিধ্বংসী ফলাফল হতে পারে। কারণ কি ?

পৃথিবীর অভ্যন্তরস্থ পর্যাবৃত্ত কম্পনের কম্পাঙ্ক হ্রদের জলের তরঙ্গের কম্পাঙ্কের সাথে মিলে গেলে অনুনাদ সৃষ্টি হবে এবং হ্রদের জলে বিরাট বিস্তারের তরঙ্গ উৎপন্ন হবে। এতে হ্রদের পার্শ্ববর্তী জনবসতিতে প্লাবন ঘটবে এবং মানুষ ও জীবজন্তুর প্রাণহানির সম্ভাবনা থাকবে।

Fourier's Theorem - Application to saw tooth wave and square wave

ফুরিয়ার উপপাদ্য Fourier's Theorem

পর্যায়ক্রমিকঅপেক্ষক periodic function

যদি প্রতিটি কোটির (ordinate) f(t) এর মান ভুজাক্ষ (abscissa) বরাবর পুনরাবৃত্ত হয় তাহলে f(t) কে পর্যায়ক্রমিক অপেক্ষক (periodic function)বলা হয়।

যদি $f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = \ldots$ হয় তাহলে T কে $f(t)$ অপেক্ষকের পর্যায়কাল বলা হয়।

$sinx$, $cosx$, $secx$এবং$cosecx$ এর পর্যায়কাল 2π ।

$tanx$ এবং$cotx$ এর পর্যায়কাল π ।

$\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \ldots$ সুতরাং $\sin x$ একটিপর্যায়ক্রমিক অপেক্ষক যার পর্যায়কাল 2π ।

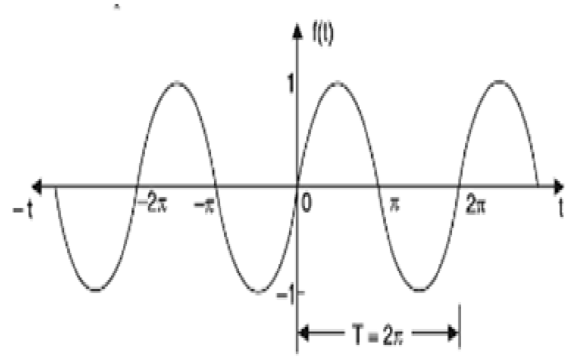
$$\sin 5x = \sin(5x+2\pi) = \sin 5\left(x+\frac{2\pi}{5}\right), \text{Period} = \frac{2\pi}{5}$$

$$\cos 3x = \cos(3x+2\pi) = \cos 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right), \text{Period} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\frac{2n\pi x}{k} = \cos\left(\frac{2n\pi x}{k}+2\pi\right) = \cos\frac{2n\pi}{k}\left(x+\frac{2\pi k}{2n\pi}\right)$$

$$= \cos\frac{2n\pi}{k}\left(x+\frac{k}{n}\right), \text{Period} = \frac{k}{n}$$

$$\tan 2x = \tan(2x+\pi) = \tan 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \text{Period} = \frac{\pi}{2}$$



এটাকে sinusoidal পর্যায়ক্রমিক অপেক্ষক (sinusoidal periodic function)বলা হয়।

Fourier series

A Fourier series may be defined as an expansion of a function in a series of sines and cosines such as

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

The coefficients are related to the periodic function f(x)

DIRICHLET'S CONDITIONS FOR A FOURIER SERIES

If the function $f(x)$ for the interval $(-\pi, \pi)$

(1) is single-valued (2) is bounded

(3) has at most a finite number of maxima and minima.

(4) has only a finite number of discontinuous

(5) is $f(x + 2\pi) = f(x)$ for values of x outside $[-\pi, \pi]$, then

$$S_P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{P} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{P} b_n \sin nx$$

converges to $f(x)$ as $P \to \infty$ at values of x for which $f(x)$ is continuous and the sum of the series is equal to $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ at points of discontinuity.

Evaluation of Fourier Coefficients

To determine the Fourier coefficients, we use the following results, m and n being integers.

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin m\omega t\, dt = 0, \quad \text{for all integral values of } m. \tag{3.4}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega t\, dt = 0, \quad \text{for all integral values of } n. \tag{3.5}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega t \sin n\omega t\, dt = 0, \quad \text{for all integral values of } m \text{ and } n. \tag{3.6}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin m\omega t \sin n\omega t\, dt = 0, \quad \text{for } m \neq n \tag{3.7}$$

$$= \frac{T}{2}, \quad \text{for } m = n \tag{3.8}$$

and

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega t \cos n\omega t\, dt = 0, \quad \text{for } m \neq n \tag{3.9}$$

$$= \frac{T}{2}, \quad \text{for } m = n. \tag{3.10}$$

Integrating Eq. (3.1), we get

$$\int_0^T f(t)dt = a_0 \int_0^T dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)dt = a_0 T,$$

which follows from Eqs. (3.5) and (3.4) with $t_0 = 0$. Therefore,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt. \tag{3.11}$$

This shows that a_0 is *the average value* of $f(t)$ over the period T. Thus, $a_0 = \overline{f(t)}$, the bar denoting the mean value.

To find the coefficient a_k, Eq. (3.1) is multiplied by $\cos k\omega t$ and then integrated from 0 to T. Hence

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) \cos k\omega t \, dt &= \int_0^T a_0 \cos k\omega t \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T (a_n \cos n\omega t \cos k\omega t \\ &\qquad + b_n \sin n\omega t \cos k\omega t) dt \\ &= 0 + a_k \frac{T}{2} + 0,\end{aligned}$$

where Eqs. (3.5), (3.9), (3.10), and (3.6) have been used with $t_0 = 0$. So,

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t \, dt. \tag{3.12}$$

Similarly, to determine the coefficient b_k, we multiply. Eq. (3.1) by $\sin k\omega t$ and integrate from 0 to T. Proceeding along the same lines followed in the evaluation of a_k, we obtain

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t \, dt. \tag{3.13}$$

With known $f(t)$, the Fourier coefficients can be found from Eqs. (3.11), (3.12), and (3.13). The evaluation of the Fourier coefficients is generally a tedious task. Fortunately, some simplifications can be made if the periodic function has certain types of symmetries. We shall discuss this point in the following section. For this simplification, symmetry must be kept in mind in selecting the $t = 0$ point on the time axis.

Fourier Series of Some Typical Waveforms

(a) **Square wave pulses:** The square wave pulses, shown in Fig. 3.2, have the period T and amplitude V. We have

$$f(t) = V \quad \text{for } 0 < t < \frac{T}{2}$$
$$= -V \quad \text{for } \frac{T}{2} < t < T.$$

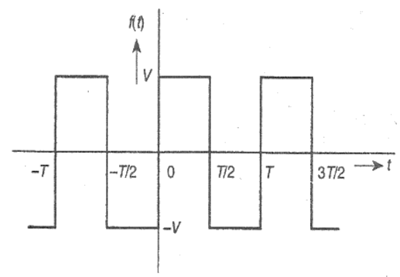


Fig. 3.2 A train of square wave pulses

Hence

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} V\,dt + \int_{T/2}^{T}(-V)dt\right]$$
$$= \frac{V}{T}\left[\frac{T}{2} - \left(T - \frac{T}{2}\right)\right] = 0.$$

This is the expected result, as it is evident from Fig. 3.2 that the average value of $f(t)$ is zero.

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt$$
$$= \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} V\cos k\frac{2\pi}{T}t\,dt + \int_{T/2}^{T}(-V)\cos k\frac{2\pi}{T}t\,dt\right]$$
$$= \frac{2V}{T}\times 0 = 0.$$

This result is also expected: since $f(t)$ is an odd function, all the cosine terms must be absent.

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,dt$$
$$= \frac{2V}{T}\left[\int_0^{T/2}\sin k\frac{2\pi}{T}t\,dt - \int_{T/2}^{T}\sin k\frac{2\pi}{T}t\,dt\right]$$
$$= \frac{2V}{T}\frac{T}{2\pi k}\left[\cos k\frac{2\pi}{T}t\Big|_{T/2}^{0} + \cos k\frac{2\pi}{T}t\Big|_{T/2}^{T}\right]$$
$$= \frac{V}{\pi k}(1 - \cos k\pi + \cos 2k\pi - \cos k\pi)$$
$$= \frac{2V}{k\pi}(1 - \cos k\pi).$$

If k is even, $\cos k\pi = 1$ and so $b_k = 0$.
If k is odd, $\cos k\pi = -1$ and so $b_k = \frac{4V}{k\pi}$.

Therefore, all the even terms of the sine series are absent, and we have for the Fourier series

$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} b_n \sin n\omega t = \frac{4V}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega t. \qquad (3.38)$$

Sawtooth waveform: A sawtooth waveform of time period T and peak value A is depicted in Fig. 3.8. Such a voltage waveform is applied to the time base of a cathode-ray oscilloscope (CRO). Here

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{A}{T^2}\int_0^T t\,dt = \frac{A}{2}.$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt = \frac{2A}{T^2}\int_0^T t\,\cos k\frac{2\pi}{T}t\,dt$$

$$= \frac{2A}{T^2}\left[t\frac{T}{2k\pi}\sin k\frac{2\pi}{T}t\Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{2k\pi}\sin k\frac{2\pi}{T}t\,dt\right]$$

(Integrating by parts)

$$= \frac{2A}{T^2}\left(\frac{T}{2k\pi}\right)^2 \cos k\frac{2\pi}{T}t\Big|_0^T = 0,$$

whence the cosine terms disappear.

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,dt = \frac{2A}{T^2}\int_0^T t\sin k\frac{2\pi}{T}t\,dt$$

$$= \frac{2A}{T^2}\left[-\frac{tT}{2k\pi}\cos k\frac{2\pi}{T}t\Big|_0^T + \int_0^T \frac{T}{2k\pi}\cos k\frac{2\pi}{T}t\,dt\right]$$

$$= \frac{2A}{T^2}\left[-\frac{T^2}{2k\pi} + \left(\frac{T}{2k\pi}\right)^2 \sin k\frac{2\pi}{T}t\Big|_0^T\right]$$

$$= -\frac{A}{k\pi}.$$

$f(t) = \frac{A}{T}t, \quad \text{for } 0 < t < T.$

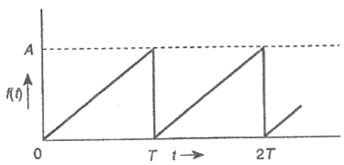


Fig. 3.8 Sawtooth waveform

Therefore, the Fourier series for the sawtooth waveform is

$$f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega t$$

$$= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots\right). \qquad (3.42)$$

The addition of the first few terms of the series [Eq. (3.42)] is shown graphically in Fig. 3.9. The superposition of more and more terms clearly shows the convergence of the series, i.e., the inclusion of more and more terms in the series improves the resemblance between the resultant curve and the curve under test.

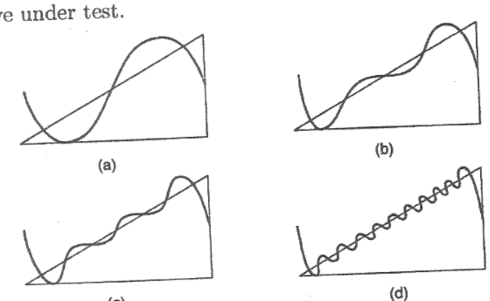


Fig. 3.9 Superposition of the average and (a) the first harmonic, (b) the first two harmonics, (c) the first three harmonics, and (d) the first ten harmonics in the Fourier series of the sawtooth waveform

Note that at the discontinuity (i.e., at $t = 0$ or $t = T$) the series attains the mean of the values on the two sides of the discontinuity. This value is $A/2$.

Example 1. *Find the Fourier series representing*

$$f(x) = x, \quad 0 < x < 2\pi$$

and sketch its graph from $x = -4\pi$ to $x = 4\pi$.

Solution. Let $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots$ ...(1)

Hence $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n} - 1.\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos 2n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{1}{n^2\pi}(1-1) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - 1.\left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2\pi\cos 2n\pi}{n}\right] = -\frac{2}{n}$$

Substituting the values of $a_0, a_1, a_2 \ldots, b_1, b_2 \ldots$ in (1), we get

$$x = \pi - 2\left[\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots\right]$$ **Ans.**